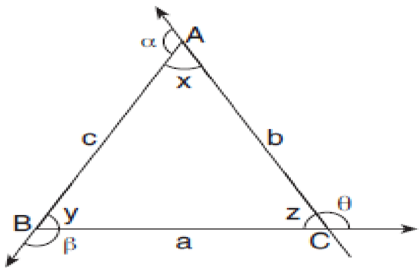


$[AB] \cup [AC] \cup [BC] = \widehat{ABC}$

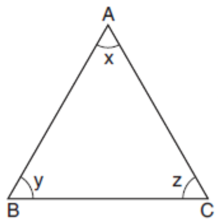
x, y, z üçgeninin iç açıları,

α, β, θ üçgeninin dış açıları

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$

ABC üçgeninin kenar uzunluklarıdır.

a) Dar Açılı Üçgen



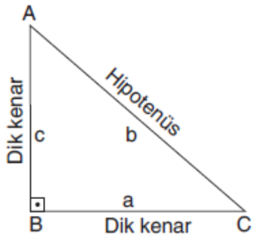
İç açılarının her birinin ölçüsü 90° den küçük olan üçgendir.

$x < 90°$

$y < 90°$

$z < 90°$

b) Dik Açılı üçgen



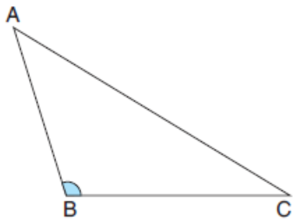
Bir açısı 90° olan üçgenlerdir.

$m(\widehat{B}) = 90°$

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 90°$

$\boxed{a^2 + c^2 = b^2}$

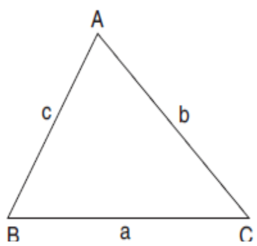
c) Geniş Açılı Üçgen



Bir iç açısının ölçüsü 90° den büyük olan üçgendir.

$m(\widehat{ABC}) > 90°$

a) Çeşitkenar Üçgen



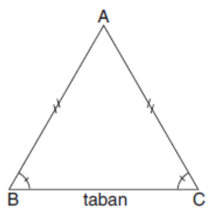
Kenar uzunlukları birbirinden farklı olan üçgenlerdir.

$a \neq b$

$a \neq c$

$b \neq c$

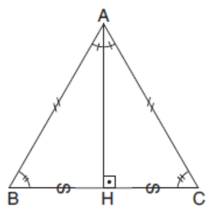
b) İkizkenar Üçgen



İki kenarının uzunluğu eşit olan üçgenlerdir. Farklı uzunluğu olan kenara taban denir.

$|AB| = |AC|$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$



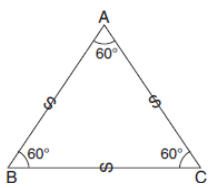
İkizkenar üçgenin tepe açısına ait yükseklik aynı zamanda hem açıortay hem de kenarortaydır.

$h_a = n_A = V_a$

c) Eşkenar Üçgen

Üç kenarı da birbirine eşit olan üçgenlere eşkenar üçgen denir. Eşkenar üçgenin tüm iç açıları eşit ve 60° dir.

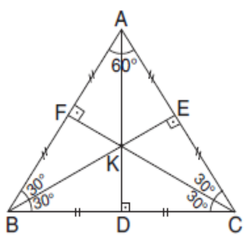
1.



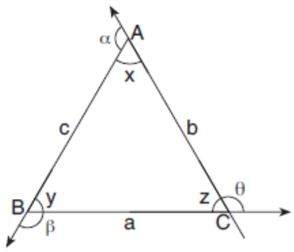
$|AB| = |AC| = |BC|$

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$

2.



K noktası, ABC üçgeninin ağırlık merkezi, iç teğet çemberinin merkezi ve diklik merkezidir.



ABC üçgeninin

i) İç açılarının toplamı $180°$ dir.

$x + y + z = 180°$

ii) ABC üçgeninin dış açılarının ölçüleri toplamı $360°$ dir.

iii) ABC üçgeninin bir dış açısının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

$x + y = \theta$

$x + z = \beta$

$y + z = \alpha$

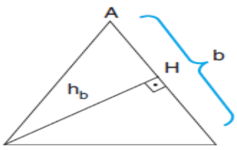
1. Yükseklik

Üçgenin bir köşesinin karşı kenarına veya bu kenarın üzerinde bulunduğu doğruya olan uzaklığıdır.

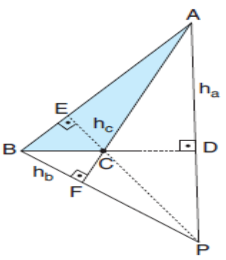
ABC üçgeninin a, b, c kenarlarına ait yükseklikleri sırasıyla h_a, h_b, h_c ile gösterilir.

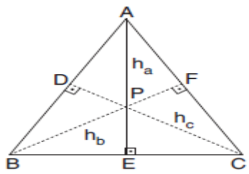
Üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir ve bu noktaya diklik merkezi denir.

a)



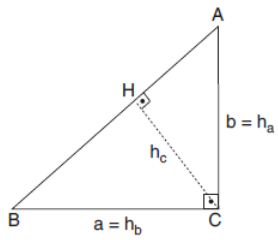
b)





ABC üçgeninin diklik merkezi P noktası, ABP üçgeninin diklik merkezi C noktasıdır.

c)



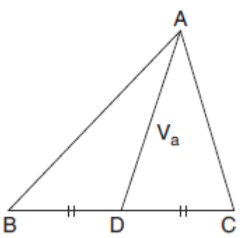
ABC üçgeninin diklik merkezi C noktasıdır.

d) ABC üçgeni için $a > b > c \Leftrightarrow h_a < h_b < h_c$ dir.

2. Kenarortay

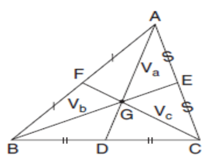
Üçgenin bir kenarının orta noktasını karşı köşeye birleştiren doğru parçasına bu kenara ait kenarortay denir.

ABC üçgeninin a, b, c kenarlarına ait kenarortaylar sırasıyla V_a, V_b, V_c ile gösterilir.

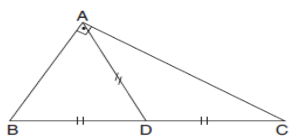


$|AD| = V_a$

a) Kenarortaylar aynı noktada kesişir ve bu noktaya ağırlık merkezi denir. Şekildeki G noktası ağırlık merkezidir.



b) Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.



$m(\widehat{BAC}) = 90°$ ise

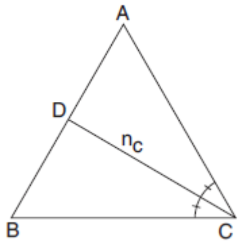
$|BD| = |DC| = |AD|$

$V_a = \frac{a}{2}$ dir.

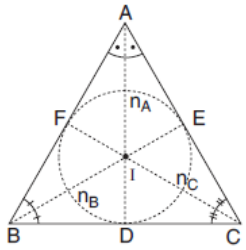
3.AÇIORTAY

Bir üçgenin bir iç açısının açıortayının karşısındaki kenarı kestiği nokta ile açının köşesini birleştiren doğru parçasına üçgenin o açısına ait iç açıortayı denir.

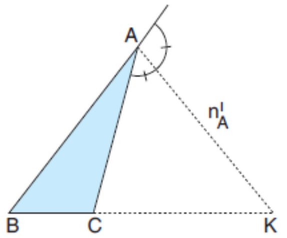
ABC üçgeninin A, B, C köşelerine ait açıortayları sırasıyla n_A, n_B, n_C ile gösterilir.



a) İç açıortaylar aynı noktada kesişir. Bu nokta iç teğet çemberin merkezidir.

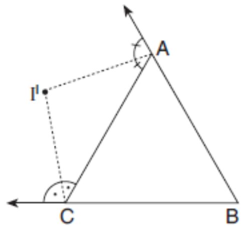


b)

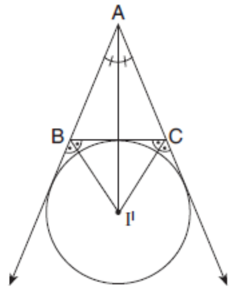


[AK], ABC üçgeninin A açısına ait dış açıortayıdır. n'_A ile gösterilir.

c) Üçgenin dış açıortayları ikişer ikişer farklı üç noktada kesişir. Bu noktalar üçgenin dış teğet çemberlerinin merkezidir.

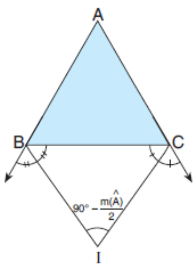


I' noktası dış teğet çemberlerden birinin merkezidir.

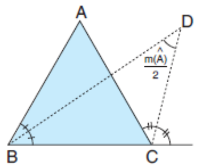


İki dış açıortay ile bunlara komşu olmayan bir iç açıortay aynı noktada kesişir.

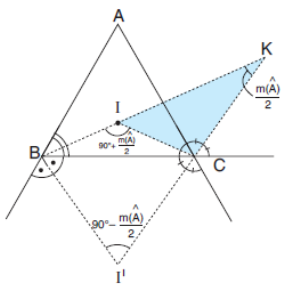
d)



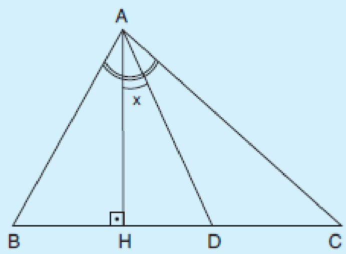
$m(\widehat{BIC}) = 90° - \frac{m(\widehat{A})}{2}$



$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{A})}{2}$



Taralı IKC üçgeninin dik üçgen olduğunu görürüz.



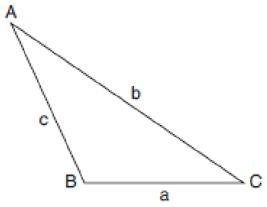
ABC bir üçgen

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD})$

[AH] ⊥ [BC] ise

$m(\widehat{HAD}) = \frac{|m\widehat{B} - m\widehat{C}|}{2}$

olur.

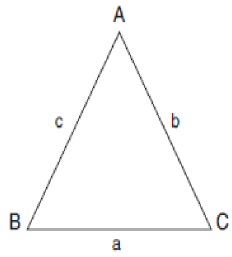


Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri arasındaki sıralama ile bu açıların karşısında bulunan kenarların uzunlukları arasındaki sıralama aynıdır.

Yani; bir üçgende büyük açının karşısındaki kenar küçük açının karşısındaki kenardan daha büyüktür.

ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C}) > m(\widehat{A}) \Leftrightarrow b > c > a$ dır.

ÜÇGEN EŞİTSİZLİĞİ



Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunluğunun toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür.

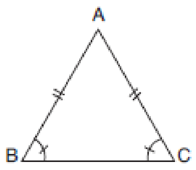
$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$

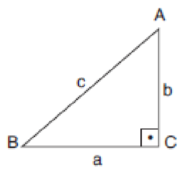
Üçgenin açılarına bakarak kenarları hakkında direkt olarak yorum yapabileceğimiz durumlar vardır.

a)



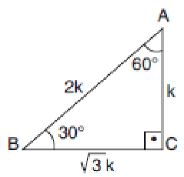
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) \Leftrightarrow |AB| = |AC|$

b)

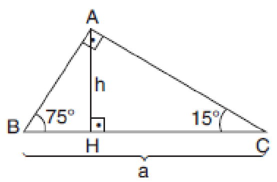


$m(\widehat{C}) = 90° \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

c)

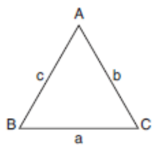


d)



a=4h

e) Kosinüs Teoremi



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos}A$

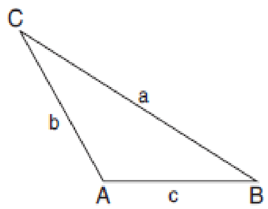
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{Cos}B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos}C$

Bahsedilen üçgenleri uygun koşullarda geçiş üçgeni olarak kullanınız.

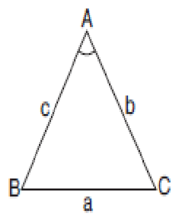
Geniş Açı olma durumu:

$m(\widehat{A}) > 90° \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$



Dar Açı olma durumu:

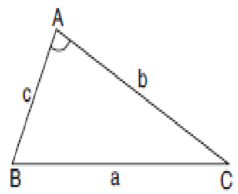
$m(\widehat{A}) < 90° \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

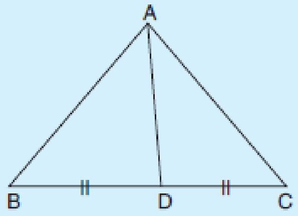


Örnek Kosinüs Teoreminin uygulanması durumu :

$m(\widehat{BAC}) > 120°$

$a^2 > b^2 + c^2 - 2bc \cos 120°$



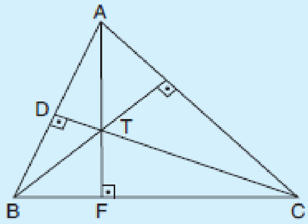


ABC üçgeninde [AD] kenarortay uzunluğu ise

$m(\widehat{BAC}) = 90° \Rightarrow |AD| = |BD| = |DC|$

$m(\widehat{BAC}) < 90° \Rightarrow |AD| > |BD| = |DC|$

$m(\widehat{BAC}) > 90° \Rightarrow |AD| < |BD| = |DC|$



ABC üçgeninde T noktası, açılardan kenarlara çizilen yükseklikle-rin kesim noktası olduğundan, üçgenin diklik merkezidir.

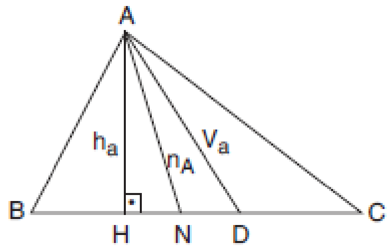
T noktası üçgenin iç bölgesinde bulunduğundan, ABC üçgeni dar açılı üçgen olur.

Bir üçgenin kenarları arasında $a < b < c$ bağıntısı varsa,yükseklik, açıortay ve kenarortayları arasında aşağıdaki gibi ilişki vardır.

$h_a > h_b > h_c$

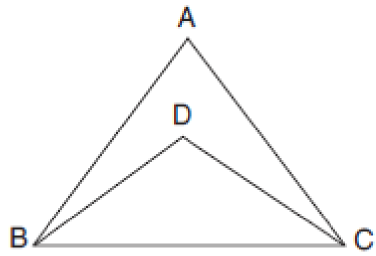
$n_A > n_B > n_C$

$V_a > V_b > V_c$



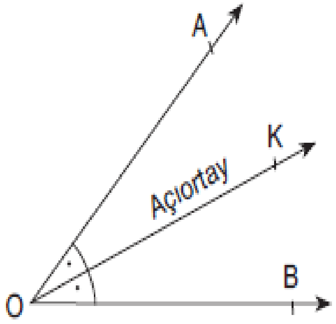
Çeşitkenar üçgende bir kenara ait çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay arasında $h_a < n_A < V_a$ şeklinde sıralama vardır.

ABC üçgeninde $b = c$ ise $h_a = n_A = V_a$ dır.

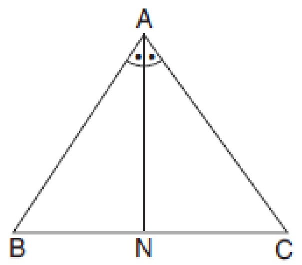


D; ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta olmak üzere;

$|DB| + |DC| < |AB| + |AC|$ dir.



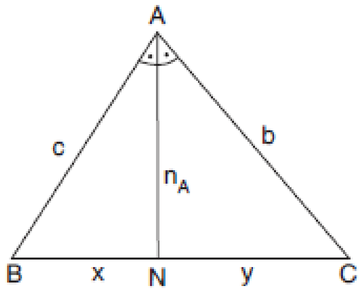
Bir açının kollarına eşit uzaklıkta olan noktaların kümesine açıortay denir. Şekilde OK ışını AOB açısının açıortayıdır.



Bir üçgende bir açının iç açıortayı, bu açının karşısındaki kenarı, komşu kenarlarının uzunlukları oranında içten böler.

$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|}$ ve orantı özelliğinden $\frac{|AB|}{|BN|} = \frac{|AC|}{|NC|}$ dir.

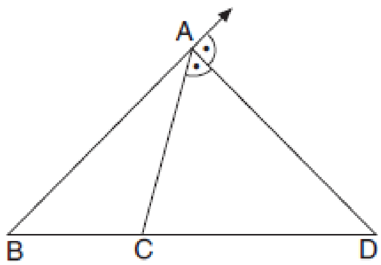
[AN] açıortayı n_A ile gösterilir.



ABC bir üçgen

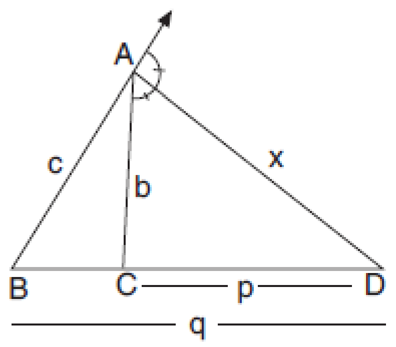
$|AN| = n_A$ olup

$n_A^2 = b \cdot c - x \cdot y$ dir.



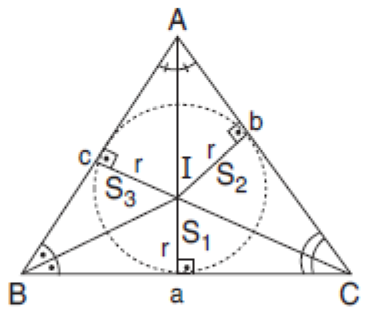
ABC üçgeninde [AD] dış açıortayı, açının karşısındaki kenarı, komşu kenarların uzunlukları oranında dıştan böler.

$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}$ dir.



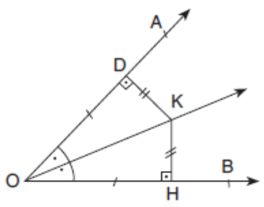
ABC üçgeninde $|AD| = x$ olmak üzere,

$x^2 = p \cdot q - b \cdot c$ dir.



ABC üçgeninde I iç açıortayların kesim noktası ve iç teğet çemberin merkezi olduğundan

$\dfrac{S_1}{a} = \dfrac{S_2}{b} = \dfrac{S_3}{c}$ olur.



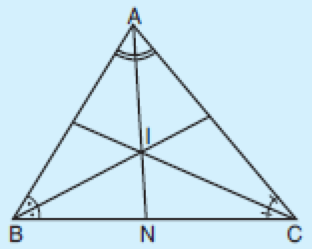
Açıortay üzerindeki herhangi bir noktadan açının kenarlarına çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir.

[OK açıortay,

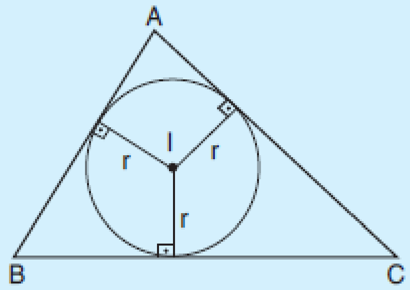
$[KH] \perp [OB$, $[KD] \perp [OA$ ise

$|KD| = |KH|$ ve $|OD| = |OH|$ tır.

İÇ TEĞET ÇEMBERİN MERKEZİ

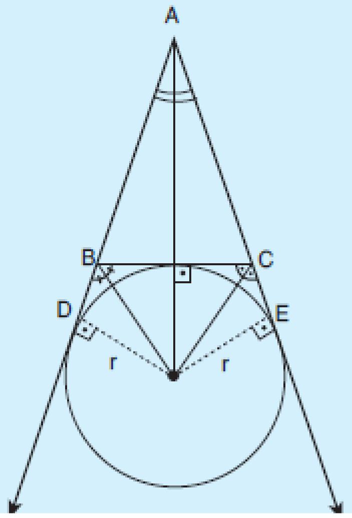


Bir üçgenin üç iç açıortayı aynı noktada kesişir. Kesiştikleri bu nokta I ile gösterilir.



İç açıortayların kesiştikleri bu I noktası aynı zamanda üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

DIŞ TEĞET ÇEMBERİN MERKEZİ



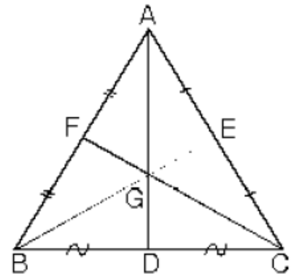
Bir üçgende iki dış açıortay ve bu açılara komşu olmayan iç açıortay üçgenin dışında bir noktada kesişir.

Bu açıortayların kesiştikleri nokta dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir.

KENARORTAY

Üçgenlerde kenarortaylar bir noktada kesişirler.Kenarortayların kesişim noktasına **ağırlık merkezi** denir.

ABC üçgeninde [AD], [BE] ve [CF] kenarortaylarının kesiştikleri G noktasına ABC üçgeninin ağırlık merkezi denir.

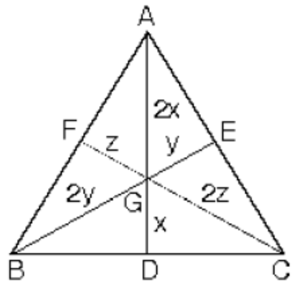


a. Ağırlık merkezi kenarortayı, kenara 1 birim, köşeye 2 birim olacak şekilde böler.

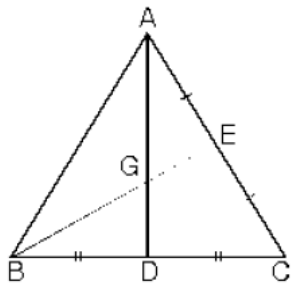
ABC üçgeninde D, E, F noktaları bulundukları kenarların orta noktaları ve G ağırlık merkezi ise

AG	=2	GD
BG	=2	GE
CG	=2	GF

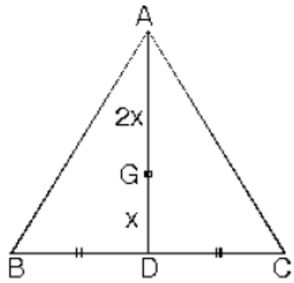
eşitlikleri vardır.



b. Bir üçgende iki kenarortayın kesişmesiyle oluşan nokta ağırlık merkezidir.



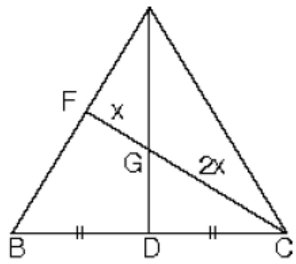
c. ABC üçgeninde [AD] kenarortay ve |AG| = 2|GD| olduğundan G noktası ağırlık merkezidir.



A

KENARORTAY

d. ABC üçgeninde [AD] kenarortay ve |CG| = 2|FG| olduğundan G noktası ağırlık merkezidir.

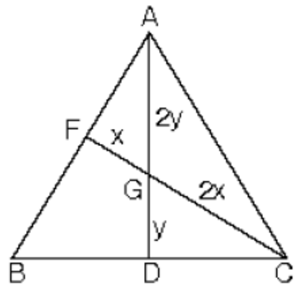


e. ABC üçgeninde

|AG| = 2|GD| ve |CG| = 2|GF|

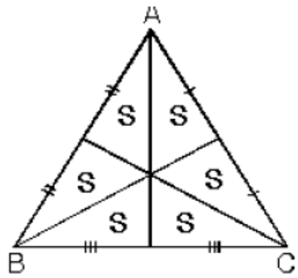
eşitliğini sağlayan G noktası ABC

üçgeninin ağırlık merkezidir.

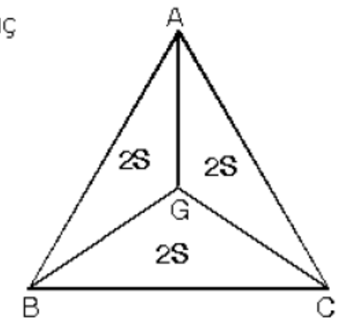


KENARORTAYDA ALAN BÖLME

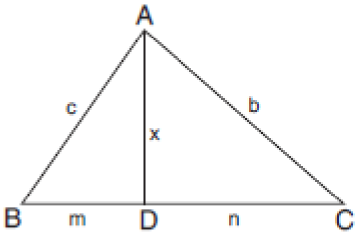
a.Kenarortaylar üçgenin alanını altı eşit parçaya bölerler.



b.G ağırlık merkezi köşelere birleştirildiğinde üçgenin alanı üç eşit parçaya bölünür.



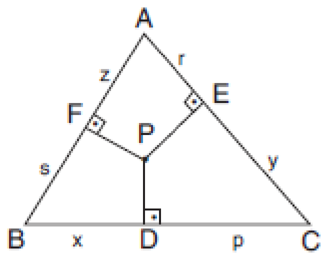
1. Stewart Bağıntısı



ABC üçgeninde [AD] herhangi bir kesen olmak üzere

$$x^2 = \frac{b^2 \cdot m + c^2 \cdot n}{m + n} - m \cdot n$$

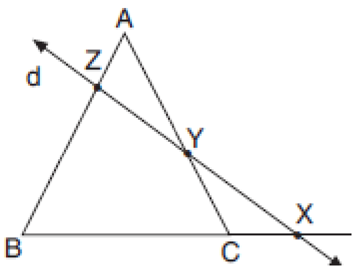
2. Carnot Bağıntısı



Herhangi bir üçgenin sınırladığı alan içinde alınan bir noktadan kenarlara çizilen dikme ayaklarının üçgen köşelerine olan uzaklıkları arasında

$x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + r^2 + s^2$ bağıntısı vadır.

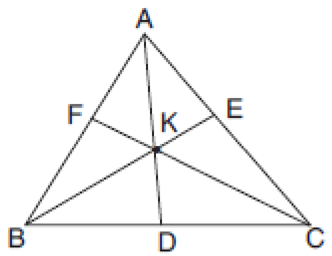
3. Menelaus Teoremi



Bir d doğrusunun, bir üçgenin kenarlarını kestiği noktaların, bulundukları kenarlar üzerindeki üçgen köşelerine uzaklıklarının oranları çarpımı 1 dir.

$$\frac{|XC|}{|XB|} \cdot \frac{|ZB|}{|ZA|} \cdot \frac{|YA|}{|YC|} = 1$$

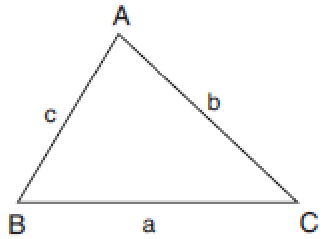
4. Seva Teoremi



Bir üçgenin farklı köşelerinden çizilen üç tane kesen bir noktada kesişiyorsa, kesen ayaklarının bulundukları kenar üzerindeki üçgen köşelerine uzaklıklarının oranları çarpımı 1 dir.

$$[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{K\} \Rightarrow \frac{|DB|}{|DC|} \cdot \frac{|EC|}{|EA|} \cdot \frac{|FA|}{|FB|} = 1$$

5. Kosinüs Teoremi



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$

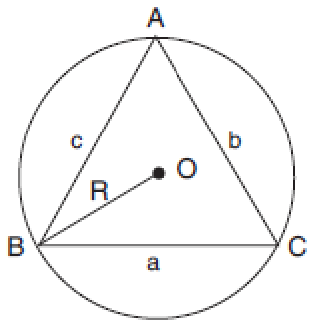
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b \cdot c}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a \cdot c}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a \cdot b}$$

6. Sinüs Teoremi

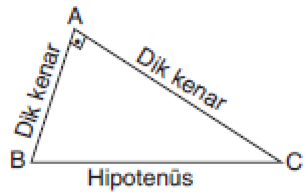


ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R olmak üzere,

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

DİK ÜÇGEN

Bir iç açısının ölçüsü 90° olan üçgene dik üçgen denir. 90° lik açının karşısındaki kenara hipotenüs, diğer kenarlara dik kenarlar denir.



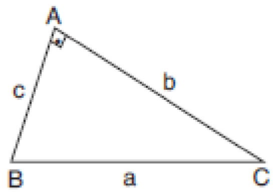
ABC dik üçgen

$m(\widehat{BAC}) = 90°$

[BC] hipotenüs

[AB] ve [AC] dik kenarlar

1. Pisagor Teoremi

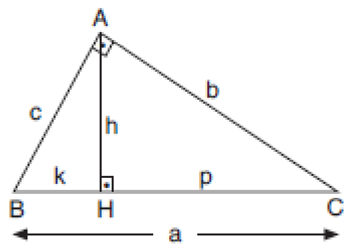


Bir dik üçgende hipotenüs uzunluğunun karesi, dik kenar uzunluklarının kareleri toplamına eşittir.

$a^2 = b^2 + c^2$

2. Öklid Bağıntıları

Dik üçgende hipotenüse ait yükseklik çizildiğinde elde edilen üçgenlerin benzerliğinden yararlanarak yazılan sonuçlardır.



$h^2 = k \cdot p$

$b^2 = p \cdot a$

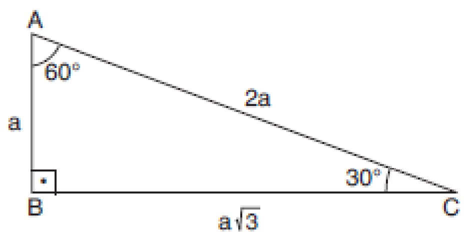
$c^2 = k \cdot a$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

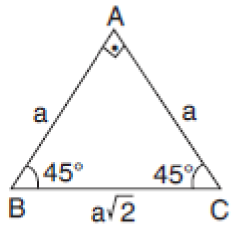
$a \cdot h = b \cdot c$

ÖZEL DİK ÜÇGENLER

1. 30°– 60°– 90° Dik Üçgeni



2. 45° – 45° – 90° Dik Üçgeni (İkizkenar Dik Üçgen)

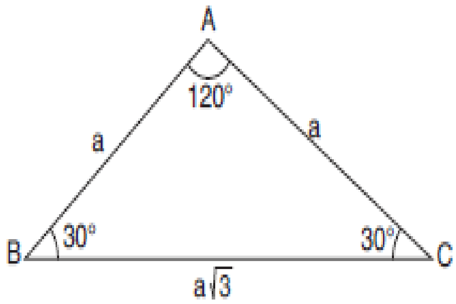


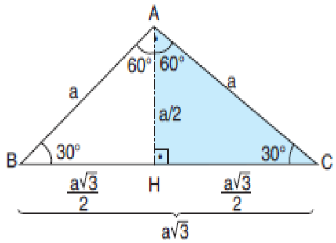
Hipotenüs uzunluğu dik kenar uzunluklarının $\sqrt{2}$ katıdır.

$|AB| = |AC| = a$

$|BC| = a\sqrt{2}$

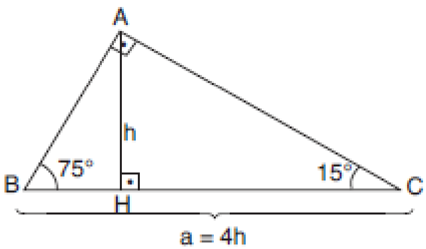
3. (30° – 30° – 120°)



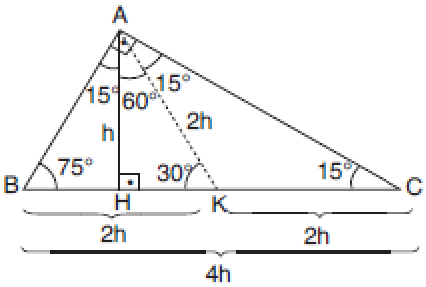


Tabanına ait yükseklik çizildiğinde elde edilen 30° – 60° – 90° dik üçgenlerinin yardımı ile 120° lik açının gördüğü kenarın uzunluğu ikizkenar uzunluklarının $\sqrt{3}$ katı bulunur.

4. (15° – 75° – 90°)



a = 4h



ABC üçgeninde hipotenüse ait kenarortay [AK] çizildiğinde

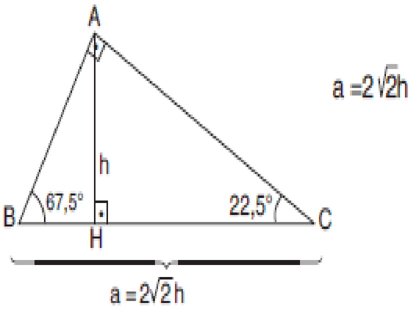
$|AK| = |BK| = |KC|$ olur.

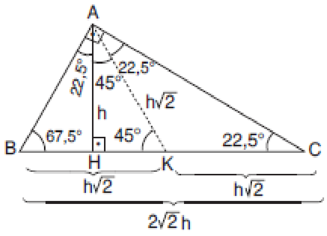
AHK 30° – 60° – 90° dik üçgeninde

$|AH| = h$ iken $|AK| = 2h$ ve $|BC| = 4h$ bulunur.

Bu durumda sonuç olarak hipotenüs uzunluğu, hipotenüse çizilen yükseklik uzunluğunun 4 katıdır.

5. (22,5° – 67,5° – 90°)



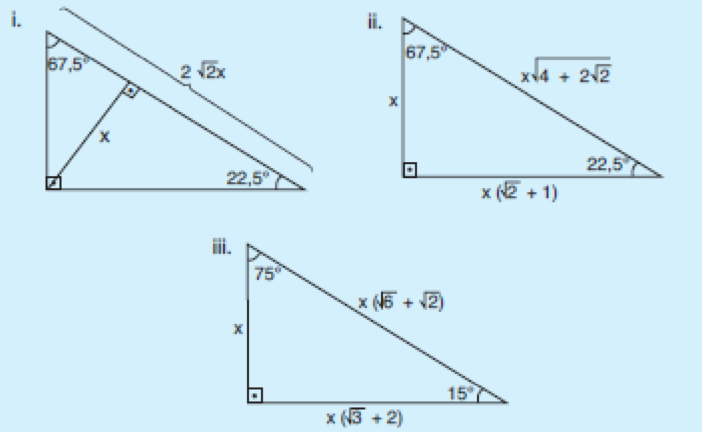


ABC üçgeninde hipotenüse ait kenarortay [AK] çizildiğinde

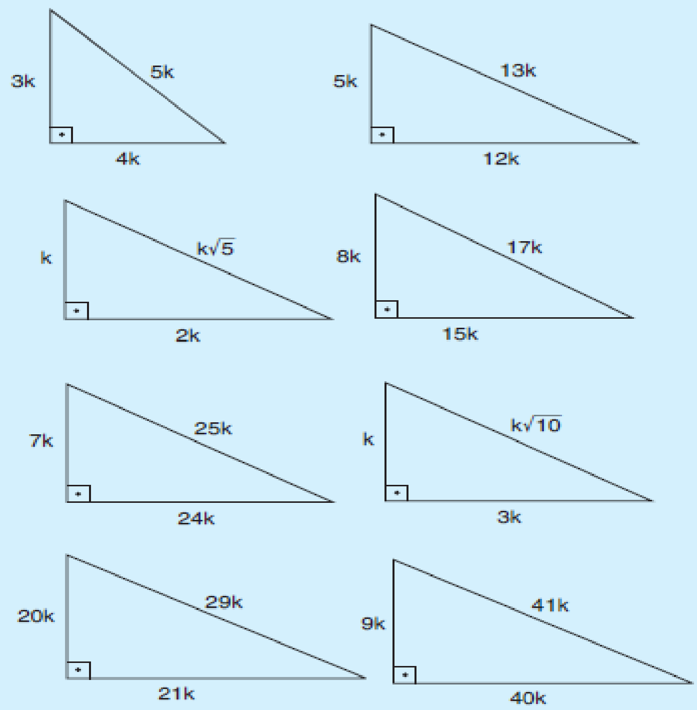
$|AK| = |BK| = |KC|$ olur.

AHK ikizkenar dik üçgeninde

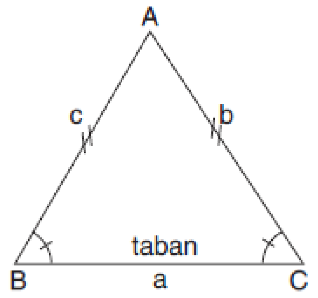
$|AH| = h$ iken $|AK| = h\sqrt{2}$ ve $|BC| = 2\sqrt{2}\ h$ bulunur.



$k \in R^+$ olmak üzere bazı özel dik üçgenler:



A. İKİZKENAR ÜÇGEN



İki kenarının uzunluğu eşit olan üçgenlere ikizkenar üçgen denir.

i) A açısı tepe açısı

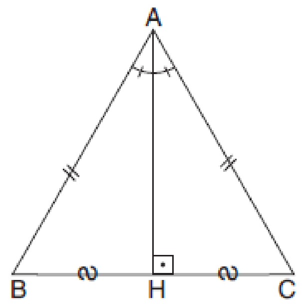
ii) [BC] taban

iii) b = c

iv) B ve C açıları taban açıları

v) $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) < 90°$ dir.

a)

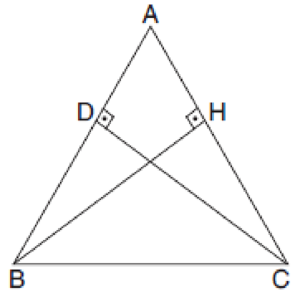


İkizkenar üçgende tabana ait yükseklik aynı zamanda açıortay ve kenarortaydır.

$h_a = V_a = n_A$

b) İkizkenar üçgenin eşit kenarlarına ait yardımcı elemanlar da eşittir.

i)

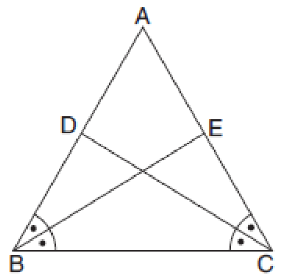


|AB| = |AC| ise

|BH| = |CD|

$(h_b = h_c)$

ii)

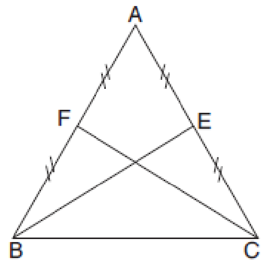


|AB| = |AC| ise

|CD| = |BE|

$(n_B = n_C)$

iii)

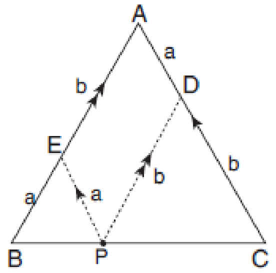


|AB| = |AC| ise

|BE| = |CF|

$(V_b = V_c)$

c)



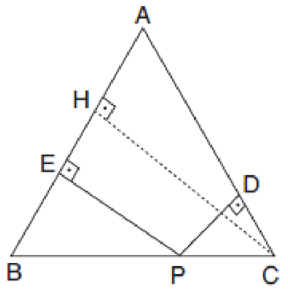
İkizkenar üçgenin tabanı üzerinde alınan bir noktadan eşit kenarlara çizilen paralel doğru parçalarının uzunlukları toplamı eşit kenarların uzunluğuna eşittir.

|AB| = |AC|, P ∈ [BC],

[PD] // [AB], [PE] // [AC] ise,

|PD| + |PE| = |AC| = |AB| dir.

d)



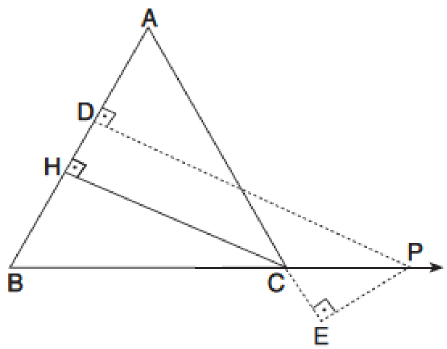
İkizkenar üçgenin tabanı üzerinde alınan herhangi bir noktadan eşit kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşit kenarlara ait yüksekliğe eşittir.

|AB| = |AC|, [PD] ⊥ [AC]

[PE] ⊥ [AB] ise,

|PD| + |PE| = |CH| = $h_c = h_b$ dir.

e)



|AB| = |AC|

P∈ [CP

[PE] ⊥ [AE]

[PD] ⊥ [AB]

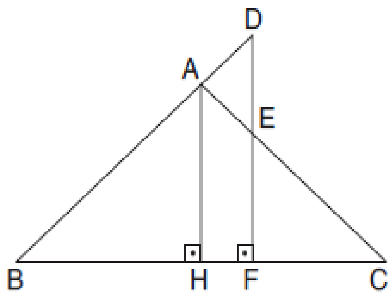
[CH] ⊥ [AB]

ise

|PD| – |PE| = |HC| = $h_b = h_c$ dir.

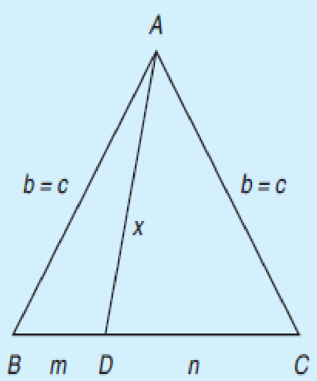
İkizkenar üçgenin taban uzantısı üzerindeki herhangi bir noktadan eşit uzunluktaki kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları farkı, eşit kenarlara ait yüksekliklerin uzunluğuna eşittir.

f)



|AB| = |AC|, [AH] ⊥ [BC], [DF] ⊥ [BC] ise

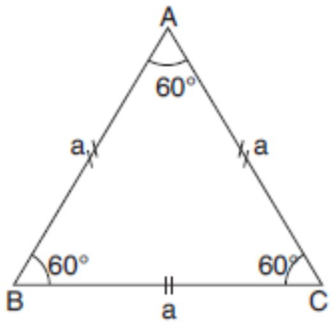
$$|AH| = \frac{|EF| + |DF|}{2} \text{ dir.}$$



|AB| = |AC| ise

$x^2 = b^2 - m.n$

EŞKENAR ÜÇGEN

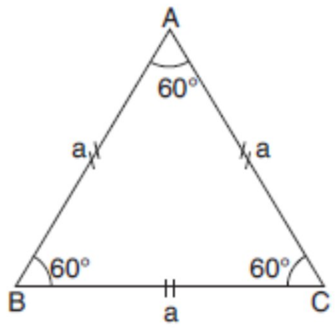


Üç kenar uzunluğu eşit olan üçgenlere eşkenar üçgen denir.

$|AB| = |AC| = |BC| = a$

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$

a)



$$h_a = n_A = V_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

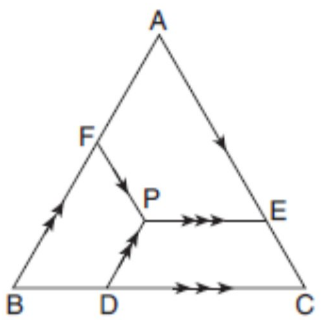
$$A(ABC) = \frac{a.h_a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Bir üçgende eşit kenarlarına ait elemanlar eşit olduğundan

$h_a = h_b = h_c = n_A = n_B = n_C = V_a = V_b = V_c$ dir.

Eşkenar üçgenin ağırlık merkezi, iç teğet çemberinin merkezi, diklik merkezi ve çevrel çemberinin merkezi aynı noktadır.

b)



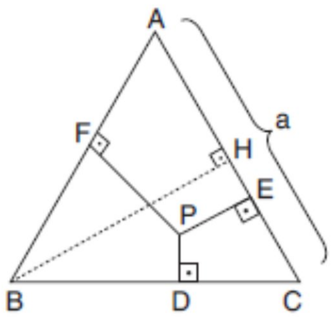
Eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan herhangi bir noktadan kenarlara paralel çizilerek elde edilen doğru parçalarının uzunlukları toplamı eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğuna eşittir.

[PD] // [AB]

[PE] // [BC]

[PF] // [AC] ise $|PD| + |PE| + |PF| = |BC|$ dir.

c)



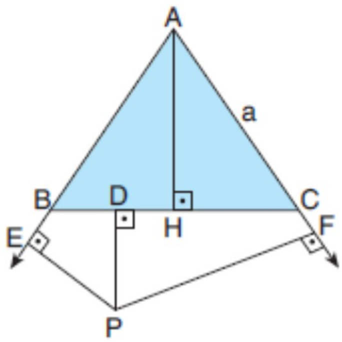
Eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan herhangi bir noktadan kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.

$[PD] \perp [BC]$

$[PF] \perp [AB]$

$[PE] \perp [AC]$ ise $|PE| + |PD| + |PF| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = |BH|$ dır.

d)



ABC eşkenar üçgeninin dış bölgesinde alınan bir noktadan eşkenar üçgenin kenarlarına indirilen dikmeler ve eşkenar üçgenin yüksekliği arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$[PD] \perp [BC]$

$[PE] \perp [AE$

$[PF] \perp [AF$ ise

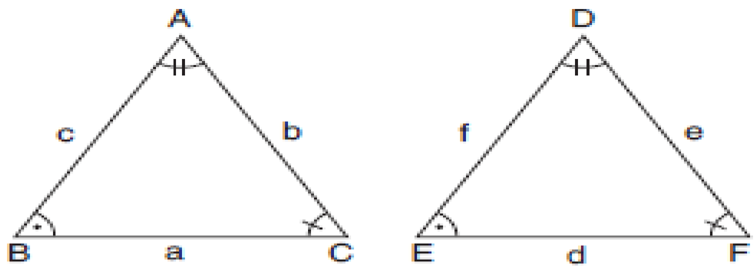
$|PF| + |PE| - |PD| = |AH| = h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ dir.

ÜÇGENDE BENZERLİK

İki üçgenin köşeleri arasında yapılan bire bir eşlemede

a) Karşılıklı açıların ölçüleri eşit,

b) Karşılıklı kenarların uzunlukları orantılı ise bu bire bir eşlemeye benzerlik eşlemesi, bu iki üçgene benzer üçgenler denir. Benzer üçgenler "~" sembolü kullanılarak gösterilir.



$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ ve } \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k, k \in R^+$$

k sayısına üçgenlerin benzerlik oranı denir. Burada $k > 1$ ise büyütme, $k < 1$ ise küçültme yapılmıştır. $k = 1$ ise üçgenler eştir.

Benzer iki üçgenin

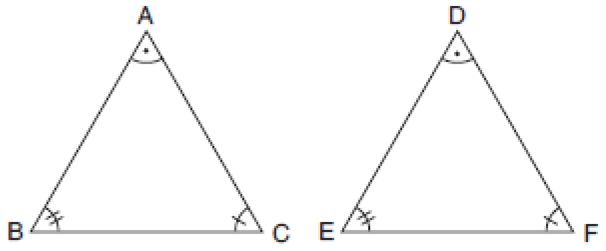
1. Karşılıklı yükseklik uzunluklarının oranı,
2. Karşılıklı açıortay uzunluklarının oranı,
3. Karşılıklı kenarortay uzunluklarının oranı,
4. Çevrelerinin oranı,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = \frac{h_a}{h_d} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{n_A}{n_D} = \frac{\text{Çevre}(ABC)}{\text{Çevre}(DEF)} = k \text{ dir.}$$

5. İç teğet çemberlerinin yarıçaplarının oranı,
6. Karşılıklı dış teğet çemberlerinin yarıçaplarının oranı,
7. Çevrel çemberlerinin yarıçaplarının oranı benzerlik oranına eşittir.

   Yani, $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$

8. Benzer iki üçgenin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine eşittir. Yani, $\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = k^2$ dir.

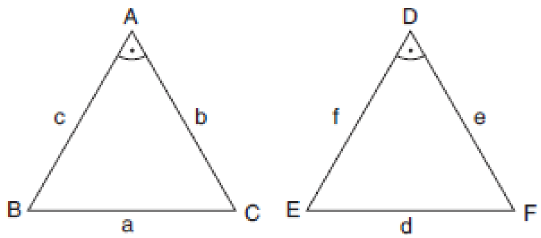


$\widehat{ABC} \longleftrightarrow \widehat{DEF}$ eşleştirmesinde

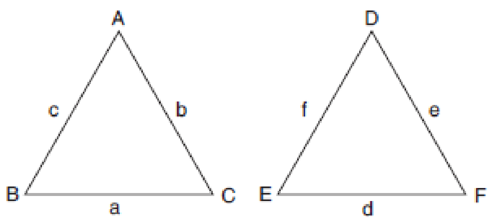
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ olup $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.

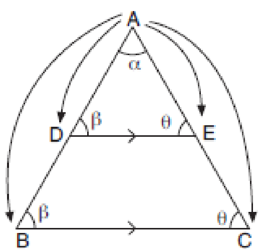
İkişer açısı eşit olan üçgenlerin üçüncü açıları da eşittir.



$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \widehat{BAC} \sim \widehat{EDF}$$



$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} \Leftrightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$$



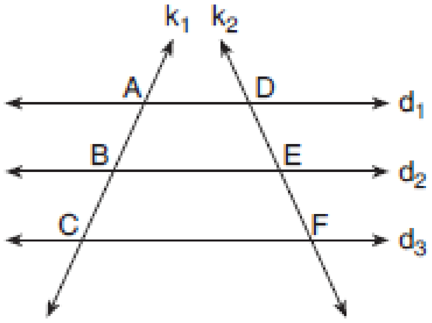
Şekilde

[DE] // [BC] ise

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC}) = \beta$,

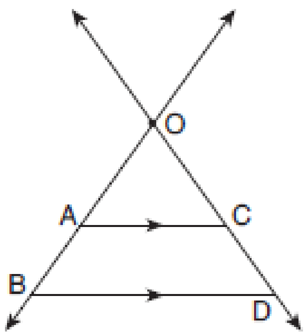
$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ACB}) = \theta$

(yöndeş açıların eşliği)dır.



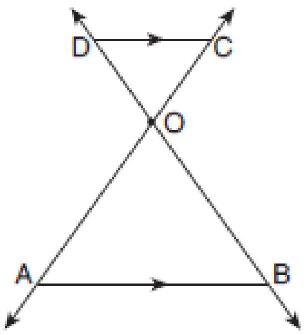
Birbirine paralel üç veya daha fazla doğru iki farklı doğru ile kesilirse kesenler üzerinde ayrılan karşılıklı doğru parçalarının uzunlukları orantılıdır.

$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$ dir.



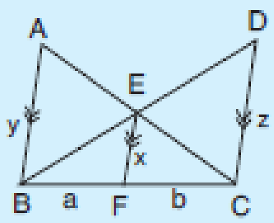
Bir açının iç bölgesindeki paralel iki doğru parçasının oranı, doğru parçalarının uç noktalarının, açının köşesine olan uzaklıkları oranına eşittir.

$[AC] \parallel [BD] \Rightarrow \dfrac{|AC|}{|BD|} = \dfrac{|OC|}{|OD|} = \dfrac{|OA|}{|OB|}$ dır.



$[AB] \parallel [DC]$

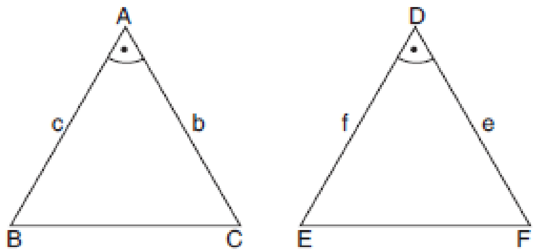
$\dfrac{|DC|}{|AB|} = \dfrac{|OC|}{|OA|} = \dfrac{|OD|}{|OB|}$ dir.



[AB] // [EF] // [DC] ise

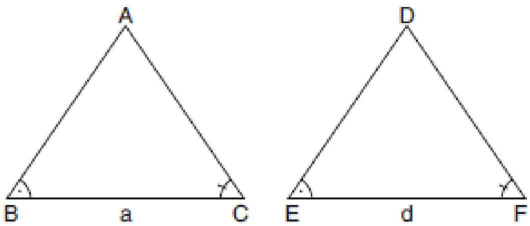
i) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ dir.

ii) a.z = b.y dir.



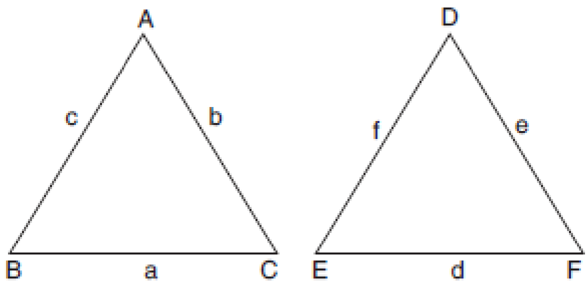
Karşılıklı iki kenarının uzunluğu eşit ve bu kenarlarının oluşturduğu açılar eşit ise bu üçgenler eştir.

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |DE| \\ |AC| = |DF| \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \text{ dir.}$$



Karşılıklı birer kenarları eşit uzunlukta ve bu kenarların ucundaki açılar eş ise bu iki üçgen eştir.

$$\left.\begin{array}{l} |BC| = |EF| \\ m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) \\ m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE}) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \text{ dir.}$$

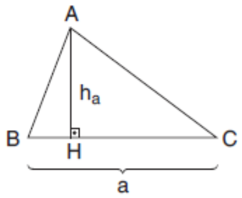


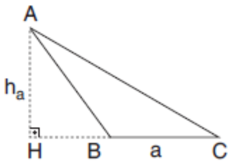
Karşılıklı kenarları aynı uzunlukta olan üçgenler eş üçgenlerdir.

$$\left.\begin{array}{l} a = d \\ b = e \\ c = f \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \text{ dir.}$$

I. ÜÇGENDE ALAN

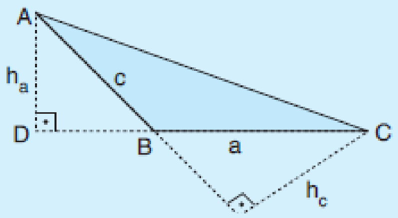
A. BİR KENARI İLE BU KENARA AİT YÜKSEKLİĞİ VERİLEN ÜÇGENİN ALANI





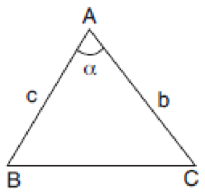
Bir üçgenin alanı; bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.

$$\text{Alan(ABC)} = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2}$$



Geniş açılı bir üçgende geniş açıyı oluşturan kenarlara ait yükseklikler üçgenin sınırladığı alanın dışındadır.

B. BİR AÇISI VE BU AÇIYI OLUŞTURAN KENAR UZUNLUKLARI BİLİNEN ÜÇGENİN ALANI



$m(\widehat{BAC}) = \alpha$,

$|AB| = c$,

$|AC| = b$ olmak üzere,

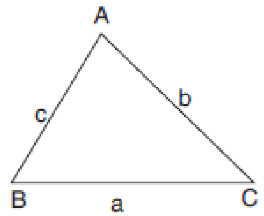
$\text{Alan(ABC)} = \frac{1}{2}\text{c.b.}\sin\alpha$ dır.

- Alan(ABC) nın en büyük olabilmesi için

  $$\text{Alan(ABC)} = \frac{1}{2}\text{c.b.}\sin\alpha$$

  eşitliğinde $\sin\alpha = 1$ yani $\alpha = 90°$ olmalıdır.

C. ÜÇ KENARININ UZUNLUĞU BİLİNEN ÜÇGENİN ALANI



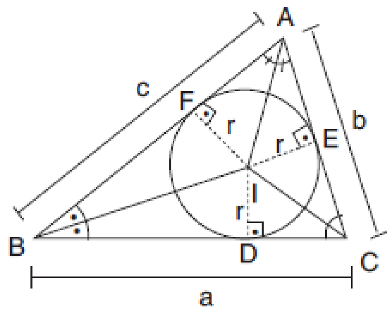
ABC üçgeninde,

$2u = a + b + c$

olmak üzere

$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ olup } \text{Alan}(ABC) = \sqrt{u.(u-a).(u-b).(u-c)} \text{ dir.}$$

D. ÇEVRESİ VE İÇ TEĞET ÇEMBERİNİN YARIÇAPI BİLİNEN ÜÇGENİN ALANI



$2u = a + b + c$

$\Rightarrow u = \dfrac{a+b+c}{2}$

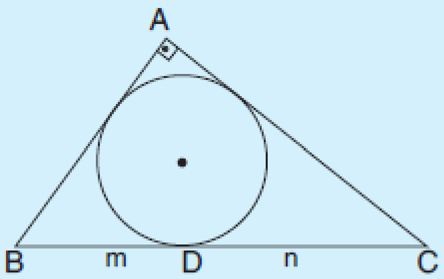
ve üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı r olmak üzere,

Alan(ABC) = Alan(IBC) + Alan(ICA) + Alan(IAB)

$$= \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right).r = u.r$$

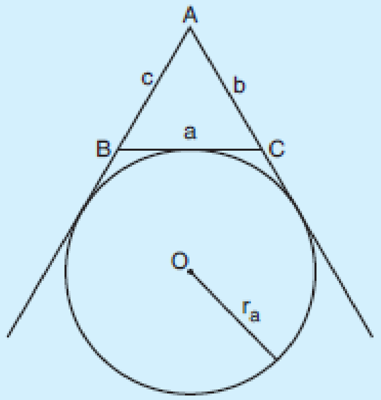
Orantı özelliğinden

$$\frac{\text{Alan}(IBC)}{a} = \frac{\text{Alan}(ICA)}{b} = \frac{\text{Alan}(IAB)}{c} = \frac{\text{Alan}(ABC)}{a+b+c} \text{ dir.}$$



ABC dik üçgeninin iç teğet çemberinin hipotenüse değdiği noktanın, hipotenüsten ayırdığı parçaların uzunlukları m ve n ise;

Alan(ABC) = m.n dir.



Kenar uzunlukları a, b, c ve kenarlara ait dış teğet çemberlerinin yarıçapları r_a, r_b, r_c olan bir ABC üçgeninin alanı

$$u = \frac{a+b+c}{2}$$ *olmak*

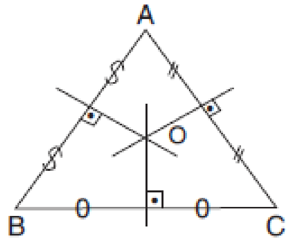
üzere,

$$\begin{aligned} \text{Alan (ABC)} &= r_a\,(u-a) \\ &= r_b\,(u-b) \\ &= r_c\,(u-c) \text{ dir.} \end{aligned}$$

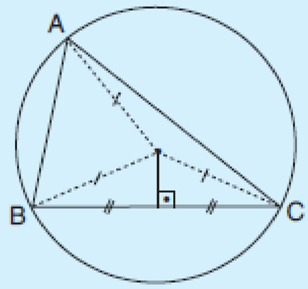
F. ÜÇGENİN KENAR ORTA DİKMELERİ

Üçgenin kenar orta dikmeleri, kenarların orta noktasından geçen dik doğrulardır.

Bu üç dikme aynı noktada kesişir ve bu nokta aynı zamanda üçgenin çevrel çemberinin de merkezidir.



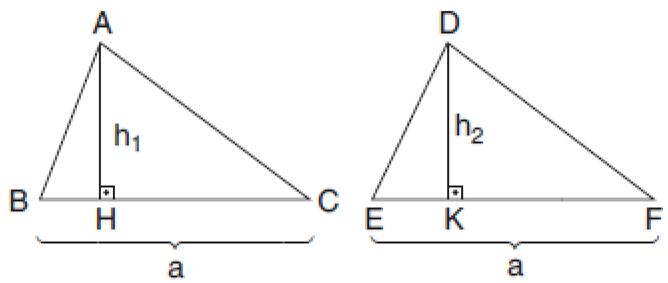
ABC üçgeni dar açılı bir üçgen ise orta dikmelerin kesim noktası üçgenin iç bölgesindedir.



Kenar orta dikmelerin kesim noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıkları eşittir. Her biri ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapıdır.

F. ALAN KARŞILAŞTIRMA

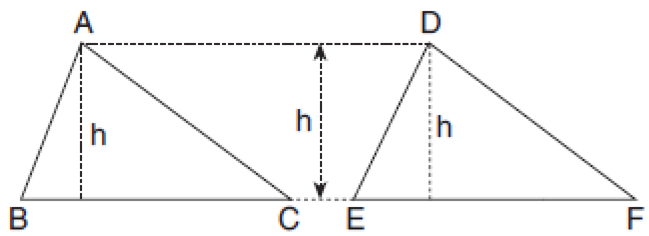
1. Birer kenarları eş olan iki üçgenin alanları arasındaki oran; bu kenarlara ait yüksekliklerin oranına eşittir.



$|BC| = |EF| = a$

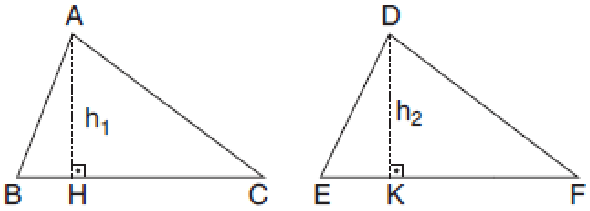
$$\frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(DEF)} = \frac{\frac{1}{2}a.h_1}{\frac{1}{2}a.h_2} \Rightarrow \frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(DEF)} = \frac{h_1}{h_2}$$

2. Birer yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları arasındaki oran; bu yüksekliklerin ait oldukları kenarların oranına eşittir.



$$\frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(DEF)} = \frac{\frac{1}{2}.|BC|.h}{\frac{1}{2}|EF|.h} \Rightarrow \frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(DEF)} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

3. Benzer iki üçgenin alanları arasındaki oran; kenarları arasındaki oranın (benzerlik oranının) karesine eşittir.



$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olsun.

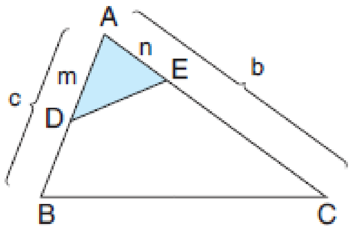
$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{h_1}{h_2} = k \text{ dir.}$$

$$\frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(DEF)} = \frac{\frac{1}{2}.|BC|.h_1}{\frac{1}{2}.|EF|.h_2} \Rightarrow \frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(DEF)} = \frac{|BC|}{|EF|}.\frac{h_1}{h_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Alan}(ABC)}{\text{Alan}(DEF)} = k^2 \text{ dir.}$$

SONUÇLAR

1.



$|AD| = m$

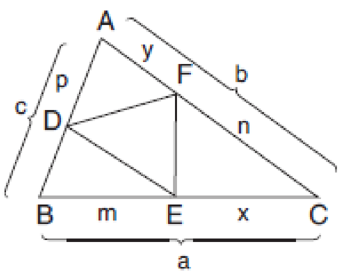
$|AE| = n$

$|AB| = c$

$|AC| = b$

$$\frac{\text{Alan}(ADE)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{m.n}{b.c} \text{ dir.}$$

2.



$|AB| = c$

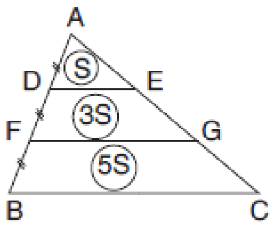
$|BC| = a$

$|AC| = b$

$$\frac{\text{Alan}(DEF)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{m.n.p + x.y.z}{a.b.c}$$

dir.

3.



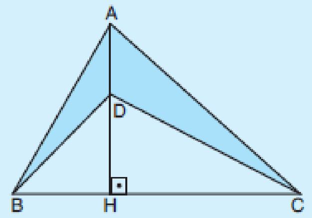
$|AD| = |DF| = |FB|$

$[DE] \parallel [FG] \parallel [BC]$

$\text{Alan}(ADE) = S$

$\text{Alan}(DFGE) = 3S$

$\text{Alan}(FBCG) = 5S$

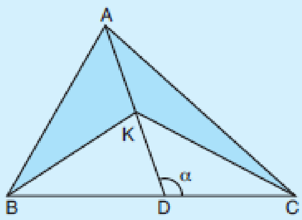


Taralı Alan = Alan (ABC) – Alan (BDC)

$$= \frac{(|AD| + |DH|) \cdot |BC|}{2} - \frac{|DH| \cdot |BC|}{2}$$

$$= \frac{|AD| \cdot |BC|}{2} + \frac{|DH| \cdot |BC|}{2} - \frac{|DH| \cdot |BC|}{2}$$

$$= \frac{|AD| \cdot |BC|}{2}$$ dır.



Taralı alan = $\frac{1}{2}$ *|AK| • |BC|• sinα dir.*